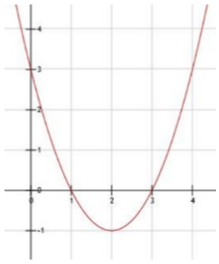
PARAGRAAF 4.1 : KWADRATISCHE FORMULES

LES 1 : VERSCHILLENDE VORMEN

Er zijn verschillende vormen van kwadratische vergelijkingen die vaak terugkomen :

(1) De vorm $y = a(x - d)(x - e)$
Snijdt de x-as in de punten (d,0) en (e,0).
De top ligt precies tussen de snijpunten met de x-as → $x_{top} = \frac{d+e}{2}$



(2) De toppenformule $y = a(x - p)^2 + q$
$y = a(x - p)^2 + q$ heeft als top (p, q)

VOORBEELD 1

Een parabool heeft top (3,10) en gaat door het punt A(1,4).

a. Stel de formule op.
b. Ligt het punt B(-1,-15) op de parabool?

Een andere parabool gaat door de punten A(-3,0), B(7,0) en C(6,4).

c. Stel de formule op.
d. Bereken de coördinaten van de top.
e. Schrijf de formule in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

OPLOSSING 1

a. Je weet de top, dus gebruik de toppenformule met p = 3 en q = 10

$y = a(x - 3)^2 + 10$

Vul het punt (1,4) in om de a te berekenen

$4 = a(1 - 3)^2 + 10q$

$4 = a \cdot 4 + 10$

$-6 = a \cdot 4$

$a = -1\frac{1}{2}$

Dus de formule is $y = -1\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 10$

b. $y = -1\frac{1}{2}(-1 - 3)^2 + 10 = -14$

$-14 \neq -15$ dus punt B ligt niet op de parabool.

c. Je weet de snijpunten met de x-as, dus gebruik formule (1) met d = -3 en e = 7 :

$y = a(x + 3)(x - 7)$

Vul het punt (6, 4) in om de a te berekenen

$4 = a(6 + 3)(6 - 7)$

$4 = a \cdot -9$

$a = -\frac{4}{9}$

Dus $y = -\frac{4}{9}(x + 3)(x - 7)$

d. $x_{top} = \frac{-3+7}{2} = 2$ en $y_{top} = -\frac{4}{9}(2 + 3)(2 - 7) = 11\frac{1}{9}$

Dus Top = $(2, 11\frac{1}{9})$

e. $y = -\frac{4}{9}(x + 3)(x - 7) = -\frac{4}{9}(x^2 - 4x - 21) = -\frac{4}{9}x^2 + 1\frac{7}{9}x + 9\frac{1}{3}$

LES 2 : TOP VAN DE PARABOOL

DEFINITIE

De top van y = $ax^2 + bx + c$ kun je eenvoudig berekenen met de formules :

(1) $x_{top} = \frac{-b}{2a}$

(2) $y_{top} = f(x_{top})$

VOORBEELD 1

De parabool $y = -x^2 + bx + 1$ gaat door het punt A(3,7)

Bereken de coördinaten van de top.

OPLOSSING 1

(1) Eerst b bereken door punt $A = (3,7)$ in te vullen:

$7 = -(3)^2 + b \cdot 3 + 1$

$7 = -9 + 3b + 1$

$15 = 3b$

$b = 3$

(2) $y = -x^2 + 3x + 1$

(3) $x_{top} = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot -1} = \frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2}$

(4) $y_{top} = f(x_{top}) = -\left(1\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{4}$

Top = $(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4})$

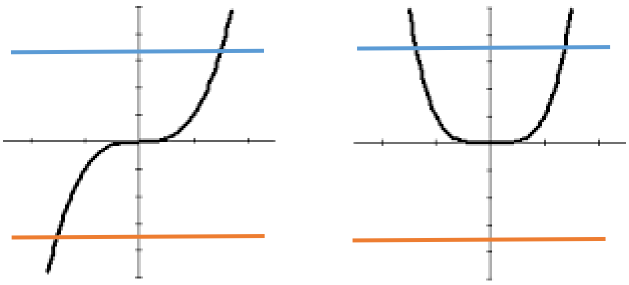
PARAGRAAF 4.2 : HOGEREGRAADSVERGELIJKINGEN

LES 1 : MACHTSVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

HERHALEN

(1) n is even

- Er zijn twee snijpunten (oplossingen) met de positieve y-as.
- Er zijn geen snijpunten (oplossingen) met de negatieve y-as.



x^n **met** n **oneven** x^n **met** n **even**

(2) n is oneven

- Er is één snijpunt (oplossing) met de positieve y-as.
- Er is één snijpunt (oplossing) met de negatieve y-as.

VOORBEELD 1

Los algebraïsch op. Geef de antwoorden in 2 decimalen nauwkeurig.

a. $3x^7 = 36$

b. $2x^4 - 10 = 360$

c. $6x^5 = -192$

d. $x^4 - 100 = -300$

Oplossing 1

a. $3x^7 = 36$

$x^7 = 12$

$x = \sqrt[7]{12} = 1{,}43$ (en NIET -1,43 !!!)

b. $2x^4 - 10 = 360$

$2x^4 = 370$

$x^4 = 185$

$x = \sqrt[4]{185} = 3{,}69 \;\; v \;\; x = -3{,}69$ (Nu wel, waarom ???)

c. $6x^5 = -192$

$x^5 = -32$

$x = \sqrt[5]{-32} = -2$

d. $x^4 - 100 = -300$

$x^4 = -200$

geen oplossing

LES 2 : HOGEREMACHTSVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

DEFINITIES

- Bereken algebraïsch = { Oplossen ZONDER de GR. Je mag (soms) afronden }
- Bereken exact = { Oplossen ZONDER de GR. Je mag NOOIT afronden }
- Bereken = { Je mag de GR (Intersect / Zero) gebruiken }

OPLOSSEN MOEILIJKE VERGELIJKINGEN

Er zijn twee technieken die heel vaak terugkomen :

(1) Pency (vervangen door p)
Vervang een deel door de letter p. Vaak is dat wat tussen haakjes staat of een macht van x.

(2) OOHH (Out Of Hookies Hoolen = buiten haakjes halen)
Kijk welke term in ieder deel staat en breng dit buiten de haakjes.

VOORBEELD 1

Bereken exact :

a. $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

b. $x^6 - 5x^3 = -4$

c. $(x - 5)^6 = 4$

OPLOSSING 1

a. $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

$x(x^2 - 4x - 12) = 0$

$x = 0 \quad of \quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 0 \quad of \quad (x - 6)(x + 2) = 0$

$x = 0 \quad of \quad x = 6 \quad of \quad x = -2$

b. $x^6 - 5x^3 = -4$

$x^6 - 5x^3 + 4 = 0$ (Stel $x^3 = p$ dan is $p^2 = p \cdot p = x^3 \cdot x^3 = x^6$)

$p^2 - 5p + 4 = 0$

$(p - 4)(p - 1) = 0$

$p = 4 \quad of \quad p = 1$ (nu weer terug vervangen $p = x^3$)

$x^3 = 4 \quad of x^3 = 1$

$x = \sqrt[3]{4} \, of \; x = \sqrt[3]{1} = 1$

c. $(x - 5)^6 = 4$ (Stel $p = x - 5$)

$p^6 = 4$

$p = \sqrt[6]{4} \quad v \quad p = -\sqrt[6]{4}$

$x - 5 = \sqrt[6]{4} \quad v \quad x - 5 = -\sqrt[6]{4}$

$x = 5 + \sqrt[6]{4} \quad v \quad x = 5 - \sqrt[6]{4}$

PARAGRAAF 4.3 : GRAFISCH NUMERIEK OPLOSSEN

ONGELIJKHEDEN

- Een ongelijkheid heeft als teken $>$; $\geq$; $<$; $\leq$
- Een ongelijkheid heeft miljoenen oplossingen (bijv. $x > 4$)
- Daarom is er ALTIJD een schets nodig om een ongelijkheid oplossen.
- Er is één uitzondering voor de schets en dat is bij een lineaire ongelijkheid (bijv. $3x - 4 > -2x + 8$)

STAPPENPLAN ONGELIJKHEID OPLOSSEN :

(1) Herleid op 0

(2) Los de vergelijking op (algebraïsch of met intersect) **(I)**

(3) Maak een schets van de situatie. **(S)**

(4) Lees de oplossing af uit de schets van de grafiek (met de GR) **(A)**

VOORBEELD 1

Los algebraïsch op $x^2 + 3x > 10$

OPLOSSING 1

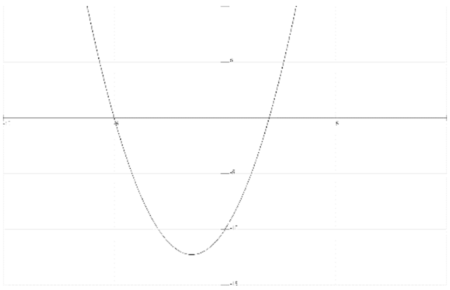
(1) $x^2 + 3x > 10$

$x^2 + 3x - 10 > 0$

(2) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x - 2)(x + 5) = 0$

$x = 2 \vee x = -5$



(3) Schets $Y1 = x^2 + 3x - 10$

(4) $x^2 + 3x - 10 > 0$ $als\ x < -5\ of\ x > 2$

OPMERKING

Als er alleen los op staat, mag je stap (2) oplossen met intersect.

$Y1 = x^2 + 3x - 10$ en $Y2 = 0$

Intersect …

PARAGRAAF 4.4 : GEBROKEN FORMULES

LES 1 : OPLOSSEN VAN GEBROKEN VERGELIJKINGEN (BREUK)

STAPPENPLAN BREUKENVERGELIJKING OPLOSSEN

Een vergelijking met een breuk los je als volgt op

(1) Zorg dat er links en rechts een breuk staat.

(2) Doe kruiselings vermenigvuldigen en los verder op (als het een uitzondering is, gebruik dan onderstaande regels).

(3) Controleer of de noemer voor de oplossing niet nul is.

ER ZIJN TWEE UITZONDERING VOOR STAP (2)

1. Als de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ is, dan is de oplossing $A = 0 \ \vee \ B = C$

2. Als de vorm $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$ is, dan is de oplossing $B = C$

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $\frac{x^2-2}{x+3} = 2$

b. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{7}{x+3}$

c. $\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x^2-1}{2x-7}$

OPLOSSING 1

a. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{2}{1}$

$2(x+3) = 1(x^2-2)$

$2x+6 = x^2-2$

$x^2-2x-8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \;\; v \;\; x = -2$

b. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{7}{x+3}$ { Uitzondering 2. $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$ }

$x^2-2 = 7$

$x^2 = 9$

$x = 3 \;\; v \;\; x = -3 \; (VN)$ { Bij x=-3 is de noemer nul, dus is er maar één oplossing }

Dus $x = 3$

c. $\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x^2-1}{2x-7}$ { Uitzondering 1. $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ }

$x^2-1 = 0 \quad v \quad x+3 = 2x-7$

$x^2 = 1 \quad v \quad -x = -10$

$x = 1 \quad v \quad x = -1 \quad v \quad x = 10$ { De noemer is niet nul voor deze oplossingen }

LES 2 : HERLEIDEN VAN BREUKEN

VOORBEELD 1

Herleid.

a. $\frac{1}{x}-\frac{7}{5x^2}=$

b. $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=$

c. $\frac{x^2+5x-14}{x^2-49}=$

d. $\frac{x^2+7x}{x^2-49}=$

OPLOSSING 1

a. $\frac{1}{x}-\frac{7}{5x^2}=\frac{1\cdot 5x}{x\cdot 5x}-\frac{7}{5x^2}=\frac{5x-7}{5x^2}$

b. $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{3(x-3)}{(x+2)(x-3)}+\frac{4(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3x-9}{(x+2)(x-3)}+\frac{4x+8}{(x+2)(x-3)}=\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}$

c. $\frac{x^2+7x}{x^3-3x}=\frac{x(x+7)}{x(x^2-3)}=\frac{x+7}{x^2-3}$

d. $\frac{x^2+5x-14}{x^2-49}=\frac{(x-2)(x+7)}{(x+7)(x-7)}=\frac{x-2}{x-7}$

VOORBEELD 2

Deel uit: $N=\frac{6x^2-3x+1}{x}$

OPLOSSING 2

$N=\frac{6x^2}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}=6x-3+\frac{1}{x}$

LES 3 GEBROKEN FORMULES OMWERKEN

Formules omwerken: kruiselings vermenigvuldigen of $2 = \frac{6}{3}$

VOORBEELD 1

a. Gegeven is $y = \frac{2}{5x-1}$. Druk x uit in y.

b. Gegeven is $A = \frac{T}{T+2}$. Schrijf T als functie van A.

c. Gegeven is $A + 1 = \frac{p+3}{p-1}$. Schrijf p als functie van A.

OPLOSSING 1

a. $\frac{y}{1} = \frac{2}{5x-1}$ (kruiselings)

$y(5x-1) = 2 \cdot 1$

$5x - 1 = \frac{2}{y}$

$5x = \frac{2}{y} + 1$

$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$

OF

$y = \frac{2}{5x-1}$ (makkelijk sommetje bijv. $2 = \frac{6}{3}$)

$5x - 1 = \frac{2}{y}$

$5x = \frac{2}{y} + 1$

$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$

b. $A(T+2) = T$

$AT + 2A = T$

$AT - T = -2A$

$T(A-1) = -2A$

$T = \frac{-2A}{A-1}$

Of links en rechts vermenigvuldigen met $T+2$

$A = \frac{T}{T+2}$ (met $T+2$ vermenigvuldigen)

$A(T+2) = \frac{T}{T+2} \cdot (T+2)$

$A(T+2) = T$

$AT + 2A = T$

$AT - T = -2A$

$T(A-1) = -2A$

$T = \frac{-2A}{A-1}$

c. $\frac{A+1}{1} = \frac{p+3}{p-1}$

$(A+1)(p-1) = 1 \cdot (p+3)$

$Ap + p - A - 1 = p + 3$

$Ap = A + 4$

$p = \frac{A+4}{A}$

OF

$A + 1 = \frac{p+3}{p-1}$ (met $p-1$ vermenigvuldigen)

$(A+1)(p-1) = p + 3$

$Ap + p - A - 1 = p + 3$

$Ap = A + 4$

$p = \frac{A+4}{A}$